数理解析研究所講究録
804巻 1992年 121-126

三次元多様体上のAnosov流の横断的不変1形式について

日大生産工　渡辺展也　(Nobuya Watanabe)

Mを3次元閉Riemannian多様体とする。M上のflow ϕ_tがAnosov flowであるとは $D\phi_t$-不変なTMのsplitting $TM = E^0 \oplus E^- \oplus E^+$があって，$E^0$は$\phi_t$を生成するベクトル場$X$で張られ ある正の数 $c \geqq 1$，λがあって，

$$\|D\phi_t v\| \geqq c e^{\lambda t}\|v\|, \quad v \in E^+,\ t \geqq 0,$$

$$\|D\phi_t v\| \leqq c^{-1} e^{-\lambda t}\|v\|, \quad v \in E^-,\ t \geqq 0,$$

となること。

このsplittingは一意的で E^-, E^+, $E^0 \oplus E^-$, $E^0 \oplus E^+$はそれぞれ積分可能で strong-stable, strong-unstable, weak-stable, weak-unstable foliationを定義する.

論文[3]で Hurder と Katok は次のような問を出している。

“もし3次元多様体上の体積を保つAnosov flowが C^∞級の weak-stable and weak-unstable foliation を持つなら適当に time-change をして C^∞ 級の transverse invariant 1-form を持つようにできるか？ "

η が transverse invariant 1-form であるとは η は 1-form で

$$i_X\eta = 1 \quad と \quad \phi_t^*\eta = \eta \quad をみたす。$$

η が C^∞ 級だと E^-, E^+ は C^∞ 級となり E. Ghys[1] によれば Anosov flow ϕ_t は Algebraic と C^∞-同値になる。

定理　ϕ_t を 3次元閉多様体上の体積を保つ Anosov flow とする。もし ϕ_t が C^∞ 級の weak-stable, weak-unstable foliation を持つなら適当に C^∞-time-change して新しい flow が C^∞ 級の transeverse invariant 1-form をもつようにできる。　□.

この定理は E. Ghys [2] により私よりおよそ6ヶ月早く得られていました。

この定理の体積を保つという仮定は大切で体積を保たないで C^∞ 級の weak-stable と weak-unstable foliation を持ちどんな time-change をしても C^∞ 級の transeverse-invariant 1-form を持たない Anosov flow が負定曲率曲面上の測地流

を perturb することにより得られます。

定理の証明　Anosov flow ϕ_t は volume form Ω を保つとします。$E^0 \oplus E^+$, $E^0 \oplus E^-$ はそれぞれ C^∞-1-form ω_+ と ω_- で定義されてるとします。

Lemma 1.　ω_+ と ω_- は次のように選べる。

$$i_X \Omega = \omega_+ \wedge \omega_- . \qquad \square.$$

Frobenius の定理よりある C^∞-1-form η_+ と η_- があって $d\omega_+ = \eta_+ \wedge \omega_+$, $d\omega_- = \eta_- \wedge \omega_-$ となりますが Lemma 1 より

Lemma 2　ある C^∞-1-form η があって

$$d\omega_+ = -\eta \wedge \omega_+ , \quad d\omega_- = \eta \wedge \omega_-$$

となる $\square$

この η は ω_+ と ω_- により1意的に定まる。

Lemma 2 より

Lemma 3　$i_X d\eta = 0$

$\phi_t^* \omega_+ = J_t^+ \omega_+$, $\phi_t^* \omega_- = J_t^- \omega_-$ とすると

ϕ_t が Anosov flow であることより

Lemma 4　ある正の数 $c \leq 1$ と λ があって

$$J_t^- \geqq c e^{\lambda t}, \quad t \geqq 0 \qquad \Box.$$

$T > 0$ に対し

$$\omega_-^T = \int_0^T \phi_s^* \omega_- ds = \int_0^T J_s^- ds \, \omega_-$$

$$\omega_+^T = \left(\int_0^T J_s^- ds \right)^{-1} \omega_+$$

とし Lemma 2 で ω_+^T と ω_-^T から定まる C^∞ 1-form を η とします。

又、$\bar{J}_t^-$ を $\phi_t^* \omega_-^T = \bar{J}_t^- \omega_-^T$ となるものとします。

Lemma 5　十分大きい $T > 0$ に対し

$$i_X \eta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \bar{J}_t^- > 0 \qquad \Box.$$

$$\tilde{X} = \frac{1}{i_X \eta} X$$ とおくと $\tilde{X}$ の生成する flow が求める flow になります。

これは Parry [4] の synchronisation を ϕ_t におこなったものになっています。

Remarks

1. time-change で winding class $[i_X\Omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ は定数倍しかかわらず C^∞-transverse 1-form があれば flow は contact flow になるので（M が T^2 の suspension でなければ） winding class $[i_X\Omega]$ が 0 でなければ weak-stable, weak-unstable foliation は C^∞ 級 でない。
2. Lemma 2 より volume を保つ 3 次元多様体上の Anosov flow の weak-stable と weak-unstable foliation の Godbillon-Vey 数は等しい。
3. Ω に関する ϕ_t の metric entropy は

$$h_\Omega(\phi_t) = \int_M i_X Y \Omega$$ で与えられる。

Hurder-Katok [4] により 一般に volume を保つ 3 次元多様体上の Anosov flow の weak-stable weak-unstable fol. は $C^{1+\alpha}$ $(\forall\alpha < 1)$ だから $i_X Y$ は $C^{\forall\alpha}$ $(\forall\alpha < 1)$ 級である。

References.

1. E. Ghys, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont differentiables, Annales Ecole Norm. Sup. 20 (1987) 251–270.

2. E. Ghys, Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens, preprint Ecole. Norm. Sup. de LYON.

3. S. Hurder and A. Katok, Differentiability, rigidity and Godbillon–Vey classes for Anosov flows, Publ. Math. IHES 72 (1990) 5–61.

4. W. Parry, Synchronisation of canonical measures for hyperbolic attractors, Commun. Math. Phys. 106 (1986) 267–275.